

## Chapitre 9, exercice 4

### Instructions pour étudier les séries du répertoire CH09EX04

*Le répertoire CH09EX04 comporte un exercice de base destiné à tous les apprenants et un exercice avancé réservé aux seuls apprenants de la version avancée du cours.*

#### Exercice de base (Pour tous les utilisateurs du cours)

##### Préalable



Le chapitre 9 du cours doit avoir été suivi jusqu'à la page 101, pour la partie 1, et jusqu'à la page 146, pour la partie 2.

##### Objectif



Le but est d'étudier les autocorrélations de séries temporelles générées au moyen de processus moyenne mobile d'ordre  $q$  ou  $MA(q)$ . Dans un deuxième stade, on examinera également les autocorrélations partielles de ces séries.

##### Données



Les données sont artificielles. Elles ont été générées au moyen de plusieurs processus moyenne mobile d'ordre  $q$  ou  $MA(q)$ . La série BLANC, présentée au chapitre 8, générée au moyen d'un processus bruit blanc a été employée pour toutes les simulations. Plusieurs jeux de paramètres sont utilisés. Les séries sont de longueur 400.

##### Structure de l'exercice

L'exercice comporte deux parties :

- Dans la partie 1, le but est d'étudier, de manière empirique, les autocorrélations de séries générées au moyen de plusieurs processus moyenne mobile d'ordre  $q$  ou  $MA(q)$ . Non seulement plusieurs valeurs des paramètres sont employées mais plusieurs longueurs de séries sont considérées.
- Dans la partie 2, le but est d'étudier, de manière empirique, les autocorrélations *partielles* des séries générées dans la partie 1. Ces autocorrélations partielles ont été introduites pour la première fois dans l'exercice 5.

**Partie 1** Un processus moyenne mobile d'ordre  $q$  ou  $MA(q)$  est défini à partir d'un processus bruit blanc. Notons  $\{e_t\}$  un processus bruit blanc de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ , égale à 1, par exemple. Notons  $\{y_t\}$  le processus  $MA(q)$ . Il est défini par la relation  $y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$ , pour des valeurs déterminées des coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ . Pour générer des séries artificielles selon un processus  $MA(q)$ , on génère une série par le processus  $\{e_t\}$  puis on calcule les  $y_t$  par la formule ci-dessus.

Nous allons encore effectuer cette étude en employant Time Series Expert for Windows. Son utilisation a été déjà présentée lors de la réalisation des exercices 1 à 3. En cas de problème avec les instructions sommaires qui suivent, prière de revoir les instructions détaillées fournies lors de la réalisation de l'exercice 1.

### 1.1 EXAMEN DES AUTOCORRELATIONS D'UNE SÉRIE ARTIFICIELLE

Nous commençons par une série générée par le processus  $MA(q)$ , définie par  $y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$ , avec  $q = 2$ ,  $\theta_1 = -0,5$  et  $\theta_2 = 0,3$ , c'est-à-dire  $y_t = e_t + 0,5e_{t-1} - 0,3e_{t-2}$ . La série s'appelle MA2\_503.

- ⇒ Choisissez le répertoire de données approprié sur votre disque (pas sur le CD-ROM): menu File ⇒ Open. Choisissez DATA puis CHAP09 puis CH09EX04.
- ⇒ Chargez le problème déjà préparé : ARTIF. Vous devez alors voir dans le bas de l'écran que la variable dépendante est BLANC, que l'échantillon d'estimation est 1 – 400 et que les prévisions seront calculées jusqu'en 400.
- ⇒ Pour visualiser la série MA2\_503: menu Graphics ⇒ Series. Choisissez MA2\_503. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez MA2\_503. Cliquez OK.



Vérifiez quels sont les retards pour lesquels les autocorrélations sont significatives au seuil de 5%.



### 1.1.1 Votre réponse

Nous allons maintenant réduire la longueur de la série, comme dans l'exercice 3. Par exemple :

- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations des 100 dernières données de la série MA2\_503: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez MA2\_503. Ensuite sur la ligne First date, tapez 301. Cliquez OK.
- ⇒ Expérimentez avec différentes longueurs de séries extraites de la série MA2\_503.



Comment pourrait-on résumer les résultats obtenus?



### 1.1.2 Votre réponse

## 1.2 EXAMEN DES AUTOCORRELATIONS D'AUTRES SÉRIES ARTIFICIELLES

Nous traitons maintenant des séries générées à partir d'un autre processus MA(2), défini par  $y_t = e_t - 0,2e_{t-1} + 0,9e_{t-2}$ . Cette série s'appelle MA202\_9. Nous considérons également deux autres séries appelées respectivement MA409 et MA50608, générées respectivement par les processus définis par les équations :  $y_t = e_t - 0,9e_{t-4}$  et  $y_t = e_t - 0,6e_{t-1} - 0,8e_{t-4} + 0,48e_{t-5}$ . Pour chacune de ces trois séries :

- ⇒ Visualisez la série: menu Graphics ⇒ Series. Choisissez son nom.
- ⇒ Visualisez les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez son nom.
- ⇒ Visualisez les autocorrélations d'extraits de la série, en

procédant comme indiqué dans l'exercice 3, paragraphe 1.3.

Dans les conclusions relatives aux autocorrélations d'un processus  $MA(q)$ , on dit dans le cours :

- Les séries générées par un processus  $MA(q)$  présentent de l'autocorrélation de retard 1 à  $q$ , tandis que les autres  $r_{q+1}, r_{q+2}, r_{q+3}, \dots$  ne sont pas (ou sont peu) significatives (c'est-à-dire sont dans la bande ou presque).
- La longueur  $T$  de la série et la valeur des coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots$  ont un effet.
- On dit qu'il y a *troncation* des autocorrélations *au delà* du retard  $q$ .



Essayez de justifier ces conclusions.



1.2.1 Votre réponse

On peut en effet montrer (voir des indications dans la cadre du **cours avancé**) que les autocorrélations de retard  $k > q$  d'un processus  $MA(q)$  sont égales à 0.

Ceci est étudié dans le cadre du cours avancé, à titre facultatif, dans la partie A du présent exercice.

## SYNTHESE

Nous avons déjà conclu que les autocorrélations de séries générées par des processus moyenne mobile d'ordre 1 sont tronquées au delà de 1. Le but du présent exercice était d'étudier le comportement des autocorrélations de séries générées par des processus moyenne mobile d'ordre  $q$  *supérieur* à 1. On constate que les autocorrélations de retard 1 à  $q$  peuvent être statistiquement significatives, en général qu'on peut accepter que celles de retard supérieur à  $q$  sont nulles.

**Partie 2** Cet partie de l'exercice 4 ne doit pas être réalisée avant l'exercice 5. Nous reprenons l'étude des processus moyenne mobile d'ordre  $q$  ou  $MA(q)$ , avec  $q = 1, 2, \dots$  mais cette fois en employant les autocorrélations partielles au lieu des autocorrélations. Les autocorrélations partielles ont été introduites dans le cours et dans l'exercice 5.

L'utilisation de Time Series Expert (TSE) a été déjà présentée lors de la réalisation des exercices 1 à 3. En cas de problème avec les instructions sommaires qui suivent, prière de revoir les instructions détaillées fournies lors de la réalisation de l'exercice 1.

### 2.1 AUTOCORRÉLATIONS PARTIELLES DE LA SERIE BLANC

- ⇒ Choisissez le répertoire de données approprié sur votre disque (pas sur le CD-ROM): menu File ⇒ Open. Choisissez DATA puis CHAP09 puis CH09EX04.
- ⇒ Chargez le problème déjà préparé : ARTIF. Vous devez alors voir dans le bas de l'écran que la variable dépendante est BLANC, que l'échantillon d'estimation est 1 – 400 et que les prévisions seront calculées jusqu'en 400.
- ⇒ Pour visualiser graphiquement la série BLANC : menu Graphics ⇒ Series. Sélectionnez BLANC. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Sélectionnez BLANC. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez Enter. Le graphique bascule des autocorrélations aux autocorrélations partielles, ou inversement.



Vérifiez quels sont les retards pour lesquels les autocorrélations partielles sont significatives au seuil de 5%.

2.1.1 Votre réponse



## 2.2 EXAMEN DES AUTOCORRELATIONS PARTIELLES D'UNE SÉRIE ARTIFICIELLE

Nous commençons par une série générée par le processus MA(1), définie par  $y_t = e_t - \theta e_{t-1}$ , avec  $\theta = 0,5$ , c'est-à-dire  $y_t = e_t - 0,5e_{t-1}$ . La série s'appelle MA105.

- ⇒ Pour visualiser la série MA105 : menu Graphics ⇒ Series. Choisissez MA105. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez MA105. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez Enter. Le graphique bascule des autocorrélations aux autocorrélations partielles, ou inversement.



Vérifiez quels sont les retards pour lesquels les autocorrélations partielles sont significatives au seuil de 5%.



### 2.2.1 Votre réponse

Nous poursuivons avec une série générée par le processus MA( $q$ ), définie par  $y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$ , avec  $q = 2$ ,  $\theta_1 = -0,5$  et  $\theta_2 = 0,3$ , c'est-à-dire  $y_t = e_t + 0,5e_{t-1} - 0,3e_{t-2}$ . La série s'appelle MA2\_503.

- ⇒ Pour visualiser la série MA2\_503: menu Graphics ⇒ Series. Choisissez MA2\_503. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez MA2\_503. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez Enter. Le graphique bascule des autocorrélations aux autocorrélations partielles, ou inversement..

**?**

Vérifiez quels sont les retards pour lesquels les autocorrélations partielles sont significatives au seuil de 5%.

### 2.2.2 Votre réponse

Nous allons maintenant réduire la longueur de la série, comme dans l'exercice 3. Par exemple :

- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles des 100 dernières données de la série MA2\_503 : menu Graphics ⇒ Autocorrélations and partials. Choisissez MA2\_503. Ensuite sur la ligne First date, tapez 301. Cliquez OK. Pressez Enter pour basculer des autocorrélations aux autocorrélations partielles, ou inversement.
- ⇒ Expérimentez avec différentes longueurs de séries extraites de la série MA2\_503.

## SYNTHESE

Dans la partie 1 de l'exercice 5, nous avons introduit les autocorrélations *partielles* et nous avons montré leur intérêt pour caractériser les processus autorégressifs d'ordre 1. Dans l'exercice 4, partie 1, nous avons considéré des séries générées par des processus moyenne mobile. Dans la présente partie 2 de l'exercice 4, nous avons montré que les autocorrélations partielles n'ont pas d'intérêt pour des processus moyenne mobile et ne permettent pas de les caractériser.



## Exercice avancé

(Pour les utilisateurs de la version avancée du cours)

### Préalable



Le chapitre 9 du cours de base et avancé doit avoir été suivi jusqu'à la page 124.

### Objectif



Le but est de développer de manière légèrement plus ample que dans le cours, *à titre facultatif*, la théorie relative aux autocorrélations d'un processus  $MA(q)$ .

### Données

Néant.

### Structure de l'exercice

L'exercice comporte une partie :

- Dans la partie A, le but est de procéder, *à titre facultatif*, à une démonstration mathématique qui explique le résultat des expériences vues dans la partie 1. La démonstration repose sur des concepts relativement simples. Il est conseillé d'attendre la fin de la partie du cours consacrée aux processus moyenne mobile avant d'examiner cette partie de l'exercice.



**Partie A** Dans la partie 1, nous avons considéré les autocorrélations de processus MA( $q$ ) de manière purement empirique, en nous basant sur des graphiques obtenus pour quelques séries artificielles. Les expériences ont permis de faire varier la valeur des coefficients et la longueur de la série. Ici, nous procédons à une démonstration mathématique qui explique le résultat des expériences. La démonstration repose sur les mêmes concepts que dans l'exercice 3.

### A.a GÉNÉRALITÉS

Un processus MA( $q$ ) ou ARMA(0,  $q$ ) est défini par l'équation suivante :

$$y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) e_t.$$

On peut vérifier que les autocovariances  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_q$  vont dépendre des coefficients du polynôme moyenne mobile, mais que  $\gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \dots$  sont nuls. Par conséquent,

$$\rho_{q+1} = \rho_{q+2} = \dots = 0.$$

On dit que la fonction d'autocorrélation d'un processus MA( $q$ ) est *tronquée après le retard  $q$* .

Considérons les deux exemples suivants.

### A.b EXEMPLE 1

Supposons une série trimestrielle générée par le processus défini par

$$y_t = e_t - \theta_4 e_{t-4}.$$

Les autocovariances du processus se calculent comme suit :

$$\gamma_0 = \text{var}(Y_t) = (1 + \theta_4^2) \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \text{cov}(e_t - \theta_4 e_{t-4}, e_{t-1} - \theta_4 e_{t-5}) = 0$$

$$\gamma_2 = \text{cov}(e_t - \theta_4 e_{t-4}, e_{t-2} - \theta_4 e_{t-6}) = 0$$

$$\gamma_3 = \text{cov}(e_t - \theta_4 e_{t-4}, e_{t-3} - \theta_4 e_{t-7}) = 0$$

$$\gamma_4 = \text{cov}(e_t - \theta_4 e_{t-4}, e_{t-4} - \theta_4 e_{t-8}) = -\theta_4 \sigma^2$$

$$\gamma_5 = \text{cov}(e_t - \theta_4 e_{t-4}, e_{t-5} - \theta_4 e_{t-9}) = 0.$$

On en déduit

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = -\frac{\theta_4}{(1+\theta_4^2)}, \quad \rho_5 = \dots = 0.$$

Dans la partie 1 de l'exercice, nous avons vu les autocorrélations d'une série de longueur 400 générée par un processus MA(4) défini par l'équation suivante  $y_t = e_t - 0,9e_{t-4}$ .

Les autocorrélations au-delà du retard 4 sont pour la plupart non significatives.

En outre, celles des retards 1, 2 et 3 ne sont pas significatives non plus.

### A.C EXEMPLE 2

Supposons encore une série trimestrielle générée par le processus défini par

$$y_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^4)e_t \quad \text{ou} \quad y_t = e_t - \theta e_{t-1} - \Theta e_{t-4} + \theta\Theta e_{t-5}.$$

Le calcul des autocovariances du processus conduit à

$$\gamma_0 = (1 + \theta^2 + \Theta^2 + \theta^2\Theta^2)\sigma^2 = (1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \text{cov}(-\theta e_{t-1}, e_{t-1}) + \text{cov}(\theta\Theta e_{t-5}, -\Theta e_{t-5}) = -\theta(1 + \Theta^2)\sigma^2$$

$$\gamma_2 = 0$$

$$\gamma_3 = \text{cov}(-\Theta e_{t-4}, -\theta e_{t-4}) = \theta\Theta\sigma^2$$

$$\gamma_4 = \text{cov}(-\Theta e_{t-4}, e_{t-4}) + \text{cov}(\theta\Theta e_{t-5}, -\theta e_{t-5}) = -\Theta(1 + \theta^2)\sigma^2$$

$$\gamma_5 = \text{cov}(\theta\Theta e_{t-5}, e_{t-5}) = \theta\Theta\sigma^2$$

$$\gamma_6 = \dots = 0.$$

On en déduit

$$\rho_1 = -\frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad \rho_4 = -\frac{\Theta}{1 + \Theta^2}, \quad \rho_3 = \rho_5 = -\frac{\theta\Theta}{(1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)}, \quad \rho_2 = \rho_6 = \dots = 0.$$

Dans la partie 1 de l'exercice, nous avons vu les autocorrélations d'une série de longueur 400 générée par un processus MA(5) défini par l'équation suivante

$$y_t = (1 - 0,6B)(1 - 0,8B^4)e_t$$

Les autocorrélations au-delà du retard 5 sont bien non significatives, pour la plupart d'entre elles. De plus, l'autocorrélation de retard 2 n'est pas significative.

Si, ayant calculé les autocorrélations  $r_k$  d'une série temporelle, on constate qu'elles ne sont pas significatives au-delà d'un retard  $k = q$ , on peut raisonnablement supposer que la série provient d'un processus MA( $q$ ). Le retard le plus élevé pour lequel les autocorrélations sont significatives identifie l'ordre du processus moyenne mobile.

#### A.d LIMITES DE SIGNIFICATION

En toute rigueur, les limites du test de bruit blanc ne peuvent pas servir pour déterminer quelles sont les autocorrélations significatives. En effet, si  $r_1$  est significative, on retient un modèle MA(1) et non un bruit blanc. L'autocorrélation  $r_2$  devrait donc être considérée en supposant que le processus est MA(1). Dans ce cas, les limites de signification à 5% ne sont plus  $\pm 1,96/\sqrt{T}$  mais  $\pm 1,96\sqrt{(1+2r_1^2)/T}$ . Plus généralement, un examen plus précis de la significativité de  $r_k$  devrait utiliser le facteur d'erreur-type

$$\sqrt{\frac{1+2(r_1^2+\dots+r_{k-1}^2)}{T}}$$

au lieu de  $1/\sqrt{T}$ . Nous nous sommes limité ici à cette dernière approximation.

Nous reviendrons sur l'application du concept d'inversibilité dans le cadre des modèles MA( $q$ ) et sur l'estimation des paramètres.

#### A.e CALCUL DES PRÉVISIONS POUR UN MODÈLE MA( $q$ )

Plaçons-nous au temps  $T$  où la dernière donnée est disponible. Supposons avoir calculé les résidus pour les temps  $T, T-1, T-2, \dots$  :  $\hat{e}_T, \hat{e}_{T-1}, \hat{e}_{T-2}, \dots$  (les résidus  $\hat{e}_t$  sont ici distingués des innovations  $e_t$ ). Sachant que le modèle est MA( $q$ ), d'équation

$$y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}, \quad (*)$$

il faut calculer les prévisions  $\hat{y}_T(1), \hat{y}_T(2), \dots, \hat{y}_T(h)$ . On écrit l'équation (\*) aux temps  $T+1, T+2, \dots, T+h$ .

Pour fixer les idées, supposons  $q=2$  et  $h=3$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}
y_{T+1} &= e_{T+1} - \theta_1 e_T - \theta_2 e_{T-1} \\
y_{T+2} &= e_{T+2} - \theta_1 e_{T+1} - \theta_2 e_T \\
y_{T+3} &= e_{T+3} - \theta_1 e_{T+2} - \theta_2 e_{T+1}.
\end{aligned}$$

Puisque les innovations se sont réalisées pour  $t \leq T$ , on peut les remplacer par les résidus, ce qui fournit

$$\begin{aligned}
y_{T+1} &= e_{T+1} - \theta_1 \hat{e}_T - \theta_2 \hat{e}_{T-1} \\
y_{T+2} &= e_{T+2} - \theta_1 e_{T+1} - \theta_2 \hat{e}_T \\
y_{T+3} &= e_{T+3} - \theta_1 e_{T+2} - \theta_2 e_{T+1}.
\end{aligned}$$

En revanche, pour  $t \geq T+1$ , les innovations sont aléatoires. Pour obtenir une prévision ponctuelle, on ne peut donc que les remplacer par leur moyenne qui est zéro. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\hat{y}_T(1) &= -\theta_1 \hat{e}_T - \theta_2 \hat{e}_{T-1} \\
\hat{y}_T(2) &= -\theta_2 \hat{e}_T \\
\hat{y}_T(3) &= 0.
\end{aligned}$$

On constate donc que les prévisions d'un modèle  $MA(q)$  sont nulles pour un horizon  $h$  supérieur à l'ordre  $q$  du modèle.

On peut aussi s'intéresser à la distribution des valeurs futures. À cette fin, introduisons les prévisions dans les équations donnant les valeurs futures :

$$\begin{aligned}
y_{T+1} &= \hat{y}_T(1) + e_{T+1} \\
y_{T+2} &= \hat{y}_T(2) + e_{T+2} - \theta_1 e_{T+1} \\
y_{T+3} &= \hat{y}_T(3) + e_{T+3} - \theta_1 e_{T+2} - \theta_2 e_{T+1}.
\end{aligned}$$

Par construction, les moyennes des valeurs futures, étant donné l'information au temps  $T$ , sont égales aux prévisions ponctuelles. Les équations ci-dessus permettent de déterminer la variance des valeurs futures, tenant compte de la supposition de bruit blanc :

$$\begin{aligned}
\text{var}(y_{T+1}) &= \sigma^2 \\
\text{var}(y_{T+2}) &= \sigma^2 (1 + \theta_1^2) \\
\text{var}(y_{T+3}) &= \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2).
\end{aligned}$$

Sous la supposition de normalité du bruit blanc, on peut donc obtenir des intervalles de prévision. Par exemple, les intervalles de prévision sont donnés par les formules suivantes :

$$y_{T+1} : \hat{y}_T(1) \pm z.\sigma$$

$$y_{T+2} : \hat{y}_T(2) \pm z.\sigma.\sqrt{1+\theta_1^2}$$

$$y_{T+3} : \hat{y}_T(3) \pm z.\sigma.\sqrt{1+\theta_1^2+\theta_2^2},$$

où  $z$  vaut 1,282 pour des intervalles à 80%, par exemple.

### A.f CONCLUSIONS

Si la fonction d'autocorrélation d'une série paraît tronquée, compte tenu des fluctuations statistiques admises, on peut envisager de la modéliser par un processus moyenne mobile. Du modèle obtenu, on déduit des prévisions et même des intervalles de prévision.

Par ailleurs, si les résidus d'un modèle, quel qu'il soit, présentent une fonction d'autocorrélation tronquée, ils sont également susceptibles d'être représentés par un modèle moyenne mobile; en combinant ce modèle avec le modèle déjà utilisé pour produire les résidus, on peut espérer trouver un meilleur modèle. La technique qui permet de réaliser ceci sera étudiée ultérieurement.

## SYNTHESE

Nous avons montré, de manière plus générale que dans les exemples de la partie 1, une caractérisation des séries produites par un processus MA( $q$ ): les autocorrélations sont tronquées au delà du retard  $q$ , ce qui veut dire que celles de retard 1 à  $q$  sont possiblement non nulles, mais les suivantes ne s'écartent pas de 0 de façon significative.

[Retour au chapitre 9](#)