

Chapitre 9, exercice 7

Instructions pour étudier les séries du répertoire CH09EX07

Le répertoire CH09EX07 comporte un exercice de base destiné à tous les apprenants et un exercice avancé réservé aux seuls apprenants de la version avancée du cours.

Exercice de base (Pour tous les utilisateurs du cours)

Préalable



Le chapitre 9 du cours doit avoir été suivi jusqu'à la page 178.

Objectif



Le but est d'étudier les autocorrélations et les autocorrélations partielles de séries temporelles générées au moyen de processus autorégressifs-moyenne mobile d'ordre (1, 1) ou ARMA(1, 1).

Données



Les données sont artificielles. Elles ont été générées au moyen de plusieurs processus ARMA(1, 1). La série BLANC, présentée au chapitre 8, générée au moyen d'un processus bruit blanc a été employée pour toutes les simulations. Plusieurs jeux de paramètres sont utilisés. Les séries sont de longueur 400.

Structure de l'exercice

L'exercice comporte une partie :

- Dans la partie 1, le but est d'étudier, de manière empirique, les autocorrélations et les autocorrélations partielles de séries générées au moyen de plusieurs processus autorégressifs-moyenne mobile d'ordre (1, 1) ou ARMA(1, 1). Non seulement plusieurs valeurs du paramètre sont employées mais plusieurs longueurs de séries sont considérées.

Partie 1 Un processus autorégressif-moyenne mobile d'ordre (1, 1) ou ARMA(1, 1) est défini à partir d'un processus bruit blanc. Notons $\{e_t\}$ un processus bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 , égale à 1, par exemple. Notons $\{y_t\}$ le processus ARMA(1, 1). Il est défini par la relation $y_t - \phi y_{t-1} = e_t - \theta e_{t-1}$. Pour générer des séries artificielles selon un processus ARMA(1, 1), on génère une série par le processus $\{e_t\}$ puis on calcule les y_t par la formule ci-dessus. Ceci nécessite 1 valeur initiale. On peut par exemple, prendre $y_1 = e_1$.



Remarques

1. Dans ce cas, on recommande d'abandonner un certain nombre des premières données, 30 ou 100, par exemple, pour réduire l'effet du démarrage.
2. Ici, nous avons employé le moteur de calcul de Time Series Expert pour générer les séries. L'algorithme employé permet de ne pas abandonner de données au début parce qu'il n'y a pas d'effet de démarrage.

L'utilisation de Time Series Expert for Windows (TSE) a été déjà présentée lors de la réalisation des exercices 1 à 3. En cas de problème avec les instructions sommaires qui suivent, prière de revoir les instructions détaillées fournies lors de la réalisation de l'exercice 1.

1.1 EXAMEN DES AUTOCORRÉLATIONS ET AUTOCORRÉLATIONS PARTIELLES D'UNE SÉRIE ARTIFICIELLE

Nous commençons par une série générée par le processus ARMA(1, 1), définie par $y_t - \phi y_{t-1} = e_t - \theta e_{t-1}$, avec $\phi = 0,9$ et $\theta = 0,5$, c'est-à-dire $y_t - 0,9y_{t-1} = e_t - 0,5e_{t-1}$. La série s'appelle AM0905.

- ⇒ Choisissez le répertoire de données approprié sur votre disque (pas sur le CD-ROM): menu File ⇒ Open. Choisissez DATA puis CHAP09 puis CH09EX07.
- ⇒ Chargez le problème déjà préparé : ARTIF. Vous devez alors voir dans le bas de l'écran que la variable dépendante est BLANC, que l'échantillon d'estimation est 1 – 400 et que les prévisions seront calculées jusqu'en 400.
- ⇒ Pour visualiser la série AM0905 : menu Graphics ⇒ Series. Choisissez AM0905. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations de la série: menu Graphics

⇒ Autocorrélations and partials. Choisissez AM0905. Cliquez OK.

⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez Enter.

?

Vérifiez quels sont les retards pour lesquels les autocorrélations et autocorrélations partielles sont significatives au seuil de 5%.



1.1.1 Votre réponse

Nous allons maintenant réduire la longueur de la série. Par exemple :

⇒ Pour visualiser les autocorrélations des 100 dernières données de la série AM0905 : menu Graphics ⇒ Autocorrélations and partials. Choisissez AM0905. Ensuite sur la ligne First date, tapez 301. Cliquez OK.

⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez Enter.

⇒ Expérimentez avec différentes longueurs de séries extraites de la série AM0905.

?

Comment pourrait-on résumer les résultats obtenus?



1.1.2 Votre réponse

1.2 EXAMEN DES AUTOCORRÉLATIONS ET AUTOCORRÉLATIONS PARTIELLES D'AUTRES SÉRIES ARTIFICIELLES

Nous traitons maintenant des séries générées à partir de deux autres processus ARMA(1, 1), définis respectivement par $y_t - 0,4y_{t-1} = e_t - 0,5e_{t-1}$ (de nom AM0405)

et par $y_t - 0,5y_{t-1} = e_t - 0,9e_{t-1}$ (de nom AM0509).

Pour chacune de ces séries :

- ⇒ Visualisez la série: menu Graphics ⇒ Series. Choisissez son nom. Cliquez OK.
- ⇒ Visualisez les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez son nom. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez Enter.
- ⇒ Visualisez les autocorrélations d'extraits de la série, en procédant comme indiqué au paragraphe 1.2.

Dans les conclusions relatives aux autocorrélations d'un processus ARMA(1, 1), on dit dans le cours :

- Les séries générées par un processus ARMA(1, 1) présentent de l'auto-corrélation significative pour plusieurs retards.
- Les séries générées par un processus ARMA(1, 1) présentent de l'auto-corrélation partielle significative pour plusieurs retards.
- La longueur T de la série et la valeur des coefficients ϕ et θ ont un effet sur les résultats.
- On peut en effet montrer (ce sera fait plus loin dans la cadre du *cours avancé*) que les autocorrélations d'un processus ARMA(1, 1) sont en général différentes de 0, comme pour un processus AR(1).
- Il est plus difficile de montrer que les autocorrélations partielles d'un processus ARMA(1, 1) sont en général différentes de 0, comme pour un processus MA(1).
- Pour un processus ARMA(1, 1), il n'y a donc pas d'effet de troncation ni pour les autocorrélations, ni pour les autocorrélations partielles.



Essayez de justifier ces conclusions.



1.2.1 Votre réponse

Les autocorrélations d'un processus ARMA(1,1) sont étudiées dans le cadre du cours avancé, à titre facultatif, dans la partie A du présent exercice. L'étude des autocorrélations partielles est trop complexe pour être abordée ici.

SYNTHESE

Dans les exercices précédents, nous avons inspecté les autocorrélations, d'une part, et les autocorrélations partielles, d'autre part, pour des séries générées par des moyenne mobile d'ordre 1 ou supérieur à 1 et par des processus autorégressifs d'ordre 1 ou supérieur à 1. Cette étude a permis de dégager une conclusion importante:

- chaque fois que les autocorrélations présenteront une allure tronquée au delà d'un certain retard q , il faudra penser à un processus moyenne mobile d'ordre q
- en revanche, quand ce seront les autocorrélations partielles qui présenteront une allure tronquée au delà d'un certain retard p , il faudra penser à un processus autorégressif d'ordre q .

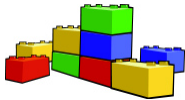
Ici nous avons traité des séries générées par des processus ARMA(1, 1). Bien que l'équation d'un processus ARMA(1, 1), $y_t - \phi y_{t-1} = e_t - \theta e_{t-1}$, soit définie en accolant le membre de gauche de l'équation d'un processus autorégressif d'ordre 1, $y_t - \phi y_{t-1} = e_t$, et le membre de droite d'un processus moyenne mobile d'ordre 1, $y_t = e_t - \theta e_{t-1}$, un processus ARMA(1, 1) n'est pas AR(1) et n'est pas MA(1).

On peut en effet constater, en règle générale, que les séries générées par des processus ARMA n'ont réellement ni des autocorrélations tronquées, ni des autocorrélations partielles tronquées.



Exercice avancé (Pour les utilisateurs de la version avancée du cours)

Préalable



Le chapitre 9 du cours de base et avancé doit avoir été suivi jusqu'à la page 192.

Objectif



Le but est de développer de manière légèrement plus ample que dans le cours, *à titre facultatif*, la théorie relative aux autocorrélations d'un processus ARMA(1, 1).

Données

Néant.

Structure de l'exercice

L'exercice comporte une partie :

- Dans la partie A, le but est de procéder, *à titre facultatif*, à une démonstration mathématique qui explique le résultat des expériences vues dans la partie 1. La démonstration repose sur des concepts relativement simples. Il est conseillé d'attendre la fin de la partie du cours consacrée aux processus ARMA avant d'examiner cette partie de l'exercice.

Partie A Dans la partie 1, nous avons considéré les autocorrélations de processus ARMA(1, 1) de manière purement empirique, en nous basant sur des graphiques obtenus pour quelques séries artificielles. Les expériences ont permis de faire varier la valeur du paramètre et la longueur de la série. Ici, nous procédons à une démonstration mathématique qui explique le résultat des expériences. La démonstration repose sur les mêmes concepts que pour les processus AR et MA.

A.a AUTOCORRÉLATIONS D'UN PROCESSUS ARMA(1,1)

Partons d'un processus ARMA(1,1). Cela signifie que la variable au temps t est solution d'une équation de la forme

$$y_t = \phi y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}$$

1) La moyenne

La moyenne du processus est donnée par

$$E(y_t) = E[\phi y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}] = \phi E(y_{t-1}) + E(e_t) - \theta E(e_{t-1}) = \phi E(y_{t-1}).$$

La supposition de stationnarité entraîne que $E(y_t) = E(y_{t-1})$ et donc $E(y_t) = \phi E(y_t)$ d'où $E(y_t) = 0$ sauf si $\phi = \pm 1$. La moyenne est donc nulle.

2) La variance et l'autocovariance de retard 1

Pour la variance, on a

$$\text{var}(y_t) = \text{var}(\phi y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}) = \phi^2 \text{var}(y_{t-1}) + \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 - 2\phi\theta \text{cov}(y_{t-1}, e_{t-1})$$

Les autres termes sont nuls parce que e_t est indépendant de e_{t-1}, \dots et donc du passé constitué par les variables aléatoires y_{t-1}, y_{t-2}, \dots

Par ailleurs

$$\text{cov}(y_t, e_t) = \text{cov}(\phi y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}, e_t) = \phi \text{cov}(y_{t-1}, e_t) + \sigma^2 - \theta \text{cov}(e_{t-1}, e_t) = \sigma^2$$

donc

$$\text{var}(y_t) = \phi^2 \text{var}(y_{t-1}) + (1 + \theta^2 - 2\phi\theta) \sigma^2$$

et par conséquent, en supposant la stationnarité qui entraîne que

$$\text{var}(y_t) = \text{var}(y_{t-1}) = \gamma_0,$$

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta^2 - 2\phi\theta)\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

Puisque $\gamma_0 \geq 0$, en tant que variance, il faut que $1 - \phi^2 > 0$ et donc que $-1 < \phi < 1$. On peut vérifier que c'est la forme que prend la *condition de stationnarité* pour un processus ARMA(1,1).

3) Autocovariances du processus

Multiplions les deux membres de l'équation du processus ARMA(1) par y_{t-k} :

$$y_t y_{t-k} - \phi y_{t-1} y_{t-k} + \theta e_{t-1} y_{t-k} = e_t y_{t-k},$$

d'où $E(y_t y_{t-k}) - \phi E(y_{t-1} y_{t-k}) + \theta E(e_{t-1} y_{t-k}) = E(e_t y_{t-k})$ et donc pour $k = 1$, la relation

$$\gamma_1 - \phi \gamma_0 + \theta \sigma^2 = 0$$

et pour $k > 1$, l'autre relation

$$\gamma_k - \phi \gamma_{k-1} = 0$$

appelées équations de Yule-Walker. On déduit de l'avant-dernière équation que

$$\gamma_1 = \phi \gamma_0 - \theta \sigma^2 = \phi \frac{(1 + \theta^2 - 2\phi\theta)\sigma^2}{1 - \phi^2} - \theta \sigma^2 = \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{1 - \phi^2} \sigma^2$$

4) Autocorrélations du processus

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = \gamma_1 / \gamma_0 = \frac{(\phi - \theta)(1 - \phi\theta)}{1 + \theta^2 - 2\phi\theta} & & \\ \gamma_2 = \phi \gamma_1 & \text{donc} & \rho_2 = \gamma_2 / \gamma_0 = \phi \rho_1 \\ \dots & & \dots \\ \gamma_k - \phi \gamma_{k-1} = 0 & \text{donc} & \rho_3 = \gamma_k / \gamma_0 = \phi^{k-1} \rho_1, \text{ etc.} \end{array}$$

Si $0 < \phi < 1$, la fonction d'autocorrélation se présente donc comme une exponentielle décroissante mais seulement à partir du retard 2.

Si $-1 < \phi < 0$, il y a simultanément décroissance exponentielle de $|\rho_k|$, toujours à partir du retard 2, et alternance en signe des ρ_k .

A.b CONDITION DE STATIONNARITÉ ET D'INVERSIBILITÉ D'UN PROCESSUS ARMA(1,1)

Nous avons déjà rencontré la *condition de stationnarité* pour un processus ARMA(1,1) : $-1 < \phi < 1$. Notons que c'est la condition de stationnarité du processus AR(1) de même coefficient ϕ . La *condition d'inversibilité* est similaire : $-1 < \theta < 1$. Notons que c'est la condition d'inversibilité du processus MA(1) de même coefficient θ .

A.c CALCUL DES PRÉVISIONS D'UN MODÈLE ARMA(1,1)

Le calcul des prévisions à partir d'un modèle ARMA(1,1) s'effectue de la façon suivante. On part de

$$\begin{aligned}y_{T+1} &= \phi y_T + e_{T+1} - \theta e_T \\y_{T+2} &= \phi y_{T+1} + e_{T+2} - \theta e_{T+1} \\y_{T+3} &= \phi y_{T+2} + e_{T+3} - \theta e_{T+2}.\end{aligned}$$

Pour obtenir une prévision ponctuelle, on remplace les innovations inconnues e_t par leur moyenne qui est zéro, et celles du passé par les résidus \hat{e}_t , ce qui donne

$$\begin{aligned}\hat{y}_T(1) &= \phi y_T - \theta \hat{e}_T \\ \hat{y}_T(2) &= \phi y_{T+1} \\ \hat{y}_T(3) &= \phi y_{T+2},\end{aligned}$$

où il faut encore substituer les valeurs futures inconnues figurant dans les seconds membres par leurs prévisions ponctuelles les plus récentes, donc calculées en $t = T$:

$$\begin{aligned}\hat{y}_T(1) &= \phi y_T - \theta \hat{e}_T \\ \hat{y}_T(2) &= \phi \hat{y}_T(1) \\ \hat{y}_T(3) &= \phi \hat{y}_T(2).\end{aligned}$$

SYNTHESE

Nous avons montré, de manière plus générale que dans les exemples de la partie 1, une caractérisation des séries produites par un processus ARMA(1, 1): les autocorrélations ne sont pas tronquées au delà du retard 1. Il est beaucoup plus difficile de montrer l'analogie pour les autocorrélations partielles, c'est-à-dire qu'elles ne sont plus tronquées au delà du retard 1.

En revanche, nous avons pu développer aisément le calcul des prévisions.

[Retour au chapitre 9](#)