

Chapitre 9, exercice 8

Instructions pour étudier les séries du répertoire CH09EX08

Le répertoire CH09EX08 comporte un exercice de base destiné à tous les apprenants et un exercice avancé réservé aux seuls apprenants de la version avancée du cours.

Exercice de base (Pour tous les utilisateurs du cours)

Préalable Le chapitre 9 du cours doit avoir été suivi jusqu'à la page 183.



Objectif Le but est d'étudier les autocorrélations et les autocorrélations partielles de séries temporelles générées au moyen de processus autorégressifs-moyenne mobile d'ordre (p, q) ou $ARMA(p, q)$.



Données Les données sont artificielles. Elles ont été générées au moyen de plusieurs processus $ARMA(p, q)$. La série BLANC, présentée au chapitre 8, générée au moyen d'un processus bruit blanc a été employée pour toutes les simulations. Plusieurs jeux de paramètres sont utilisés. Les séries sont de longueur 400.



Structure de l'exercice

L'exercice comporte une partie :

- Dans la partie 1, le but est d'étudier, de manière empirique, les autocorrélations et les autocorrélations partielles de séries générées au moyen de plusieurs processus autorégressifs-moyenne mobile d'ordre (p, q) ou $ARMA(p, q)$. Non seulement plusieurs valeurs du paramètre sont employées mais plusieurs longueurs de séries sont considérées.

Partie 1 Un processus autorégressif-moyenne mobile d'ordre (p, q) ou ARMA(p, q) est défini à partir d'un processus bruit blanc. Notons $\{e_t\}$ un processus bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 , égale à 1, par exemple. Notons $\{y_t\}$ le processus ARMA(1, 1). Il est défini par la relation

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots - \phi_p y_{t-p} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}.$$

Pour générer des séries artificielles selon un processus ARMA(p, q), on génère une série par le processus $\{e_t\}$ puis on calcule les y_t par la formule ci-dessus. Ceci nécessite p valeurs initiales. On peut par exemple, prendre $y_t = e_t, t = 1, \dots, p$.



Remarques

1. Dans ce cas, on recommande d'abandonner un certain nombre des premières données, 30 ou 100, par exemple, afin de réduire l'effet du démarrage.
2. Ici, nous avons employé le moteur de calcul de Time Series Expert pour générer les séries. L'algorithme employé permet de ne pas abandonner de données au début parce qu'il n'y a pas d'effet de démarrage.

L'utilisation de Time Series Expert for Windows (TSE) a été déjà présentée lors de la réalisation des exercices 1 à 3. En cas de problème avec les instructions sommaires qui suivent, prière de revoir les instructions détaillées fournies lors de la réalisation de l'exercice 1.

1.1 EXAMEN DES AUTOCORRELATIONS ET AUTOCORRÉLATIONS PARTIELLES D'UNE SÉRIE ARTIFICIELLE

Nous commençons par une série générée par le processus ARMA(1, 4), définie par $y_t - \phi y_{t-1} = e_t - \theta e_{t-4}$, avec $\phi = -0,6$ et $\theta = 0,8$, c'est-à-dire $y_t + 0,6 y_{t-1} = e_t - 0,8 e_{t-4}$. La série s'appelle AM14_68.

- ⇒ Choisissez le répertoire de données approprié sur votre disque (pas sur le CD-ROM): menu File ⇒ Open. Choisissez DATA puis CHAP09 puis CH09EX08.
- ⇒ Chargez le problème déjà préparé : ARTIF. Vous devez alors voir dans le bas de l'écran que la variable dépendante est BLANC, que l'échantillon d'estimation est 1 – 400 et que les prévisions seront calculées jusqu'en 400.
- ⇒ Pour visualisez la série AM14_68 : menu Graphics ⇒ Series. Choisissez AM14_68. Cliquez OK.



- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez AM14_68. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez Enter.

? Vérifiez quels sont les retards pour lesquels les autocorrélations et autocorrélations partielles sont significatives au seuil de 5%.

1.1.1 Votre réponse

- ⇒ Expérimentez avec différentes longueurs de séries extraites de la série AM14_68.

? Comment pourrait-on résumer les résultats obtenus?



1.1.2 Votre réponse

1.2 EXAMEN DES AUTOCORRELATIONS ET AUTOCORRÉLATIONS PARTIELLES D'UNE AUTRE SÉRIE ARTIFICIELLE

Nous traitons maintenant des séries générées à partir d'un autre processus ARMA, cette fois ARMA(4, 1), défini par $y_t + 0,8y_{t-4} = e_t - 0,6e_{t-1}$ (de nom AM41_86). Pour cette série :

- ⇒ Visualisez la série: menu Graphics ⇒ Series. Choisissez son nom. Cliquez OK.
- ⇒ Visualisez les autocorrélations de la série: menu Graphics ⇒ Autocorrelations and partials. Choisissez son nom. Cliquez OK.
- ⇒ Pour visualiser les autocorrélations partielles de la série, pressez

Enter.

⇒ Expérimentez avec différentes longueurs de séries extraites de la série AM14_68.

Dans les conclusions relatives aux autocorrélations d'un processus $\text{ARMA}(p, q)$, on dit dans le cours :

- Les séries générées par un processus $\text{ARMA}(p, q)$ présentent de l'auto-corrélation pour tous les retards, pas seulement ceux de 1 à q .
- Les séries générées par un processus $\text{ARMA}(p, q)$ présentent de l'auto-corrélation partielle pour tous les retards, pas seulement ceux de 1 à p .
- La longueur T de la série et la valeur des coefficients ϕ_1, ϕ_2, \dots et $\theta_1, \theta_2, \dots$ ont un effet sur les résultats.
- On peut en effet montrer (ce sera fait plus loin dans la cadre du *cours avancé* quand $p = 1$ et $q = 1$) que les autocorrélations d'un processus $\text{ARMA}(p, q)$ sont en général différentes de 0, comme pour un processus $\text{AR}(p)$. Les autocorrélations ne sont pas tronquées au-delà du retard q .
- Il est plus difficile de montrer que les autocorrélations partielles d'un processus $\text{ARMA}(p, q)$ sont en général différentes de 0, comme pour un processus $\text{MA}(q)$. Les autocorrélations partielles ne sont pas tronquées au-delà du retard q .
- Pour un processus $\text{ARMA}(p, q)$, il n'y a donc pas d'effet de troncation ni pour les autocorrélations, ni pour les autocorrélations partielles, donc pas de moyen facile d'identifier p et q .

?

Essayez de justifier ces conclusions.



1.2.1 Votre réponse

Les autocorrélations d'un processus $\text{ARMA}(1,1)$ ont été étudiées dans le cadre du cours avancé, à titre facultatif, dans la partie A de l'exercice 7. Il est trop difficile de poursuivre. Voir par exemple Box et al. (1994). A fortiori, l'étude des autocorrélations partielles est trop complexe pour être

abordée ici.

SYNTHESE

Dans les exercices 3 à 6, nous avons inspecté les autocorrélations, d'une part, et les autocorrélations partielles, d'autre part, pour des séries générées par des moyenne mobile d'ordre 1 ou supérieur à 1 et par des processus autorégressifs d'ordre 1 ou supérieur à 1. Cette étude a permis de dégager la caractérisation des processus moyenne mobile par les autocorrélations et la caractérisation des processus autorégressifs par les autocorrélations partielles.

Dans l'exercice 7, nous avons traité des séries générées par des processus ARMA(1, 1) et nous avons pu vérifier que, en règle générale, ils ne satisfont pas ni à la caractérisation d'un processus autorégressif, ni à celle d'un processus moyenne mobile. Cela signifie que, en général, ni les autocorrélations, ni les autocorrélations partielles, ne sont réellement tronquées à partir d'un certain retard. Bien entendu, en pratique, on tient compte de la bande de signification pour le test de bruit blanc à 5%, de sorte que fréquemment les autocorrélations et les autocorrélations partielles sont dans la bande à partir d'un certain retard, souvent assez éle-

Ainsi que nous le verrons, la modélisation par les processus ARMA est relativement facile tant que le modèle est simple, c'est-à-dire dépend de peu de paramètres.

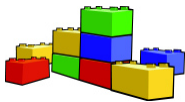
Nous n'avons pas trouvé de caractérisation des processus ARMA(p , q), c'est-à-dire de moyen simple de déterminer les deux ordres p et q . Nous verrons dans le chapitre suivant deux procédures en étapes qui permettent de déterminer les deux ordres p et q .



Exercice avancé

(Pour les utilisateurs de la version avancée du cours)

Préalable



Le chapitre 9 du cours de base et avancé doit avoir été suivi jusqu'à la page 193.

Objectif



Le but est de présenter une synthèse des propriétés des processus ARMA : comportement des autocorrélations et des autocorrélations partielles, condition de stationnarité ou de causalité, condition d'inversibilité.

Données

Néant.

Structure de l'exercice

L'exercice comporte une partie :

- Dans la partie A, le but est de procéder, *à titre facultatif*, à une synthèse des propriétés des processus ARMA, sans démonstration mathématique. Cette synthèse inclut le comportement des autocorrélations et des autocorrélations partielles mais elle couvre également des aspects déjà mentionnés dans le cours sur les contraintes sur les coefficients : la condition de stationnarité ou de causalité et la condition d'inversibilité.

Partie A Dans la partie 1, nous avons considéré les autocorrélations de processus ARMA(p, q) de manière purement empirique, en nous basant sur des graphiques obtenus pour quelques séries artificielles. Les expériences ont permis de faire varier la valeur du paramètre et la longueur de la série.

Ici nous présentons une synthèse des propriétés des processus ARMA, mais sans démonstration mathématique, contrairement à ce qui a été effectué dans les exercices précédents. Cette synthèse inclut le comportement des autocorrélations et des autocorrélations partielles mais elle couvre également des aspects déjà mentionnés dans le cours sur les contraintes sur les coefficients : la condition de stationnarité ou de causalité et la condition d'inversibilité.

Nous commençons par les liens entre processus AR, MA et ARMA.

A.a LIENS ENTRE PROCESSUS AR, MA ET ARMA

Assez naturellement, on dira que deux processus de même ordre sont *proches* si leurs coefficients sont proches. Les processus bruit blanc, AR, MA et ARMA ont des caractéristiques théoriques très différentes. Pourtant, ils peuvent également être proches les uns des autres. Par exemple, un processus MA(1) d'équation $y_t = e_t - 0,01e_{t-1}$ a comme première autocorrélation $\rho_1 = 0,01$, donc il a un comportement pratiquement identique à celui d'un bruit blanc. Il sera quasi impossible de distinguer une série générée par un tel processus de celle générée par un bruit blanc. En fait, les processus MA(q) et ARMA(p, q) peuvent être mis sous forme de processus AR(∞), tandis que les processus AR(p) et ARMA(p, q) peuvent être mis sous forme de processus MA(∞). Les exemples qui suivent illustrent ceci.

Exemple 1. L'équation définissant un processus MA(1)

$$Y_t = (1 - \theta B)e_t$$

peut s'écrire, en faisant passer l'opérateur moyenne mobile dans le premier membre, et en notant que $(1 - \theta B)^{-1} = 1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots$, sous la forme AR(∞) :

$$(1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots)Y_t = e_t.$$

Exemple 2. L'équation définissant un processus ARMA(1,1)

$$(1 - \phi B)Y_t = (1 - \theta B)e_t$$

peut s'écrire

$$\frac{1-\phi B}{1-\theta B} Y_t = e_t$$

ou encore sous forme AR(∞) :

$$\left[1 + (\theta - \phi)B + \theta(\theta - \phi)B^2 + \dots\right] Y_t = e_t.$$

Elle peut aussi s'écrire

$$Y_t = \frac{1-\theta B}{1-\phi B} e_t$$

ou encore sous forme MA(∞) :

$$Y_t = \left[1 + (\phi - \theta)B + \phi(\phi - \theta)B^2 + \dots\right] e_t.$$

Exemple 3. Considérons un processus AR(2) particulier, d'équation

$$(1 + 0,5B - 0,3B^2)Y_t = e_t.$$

En inversant le polynôme $1 + 0,5B - 0,3B^2$, on trouve

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{1 - (-0,5B + 0,3B^2)} e_t \\ &= \left[1 + (-0,5B + 0,3B^2) + (-0,5B + 0,3B^2)^2 + (-0,5B + 0,3B^2)^3 + \dots\right] e_t \\ &= \left[1 - 0,5B + 0,55B^2 - 0,425B^3 + 0,3775B^4 + \dots\right] e_t. \end{aligned}$$

Conclusions

Les processus autorégressifs, les processus moyenne mobile et les processus mixtes ARMA ont été introduits comme des processus aléatoires stationnaires. Ils serviront de modèles à des séries temporelles.

A.b PROPRIÉTÉS DES PROCESSUS ARMA

Un processus ARMA(p, q) vérifie l'équation suivante

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) Y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) e_t$$

où $\{e_t\}$ est le processus innovation, un processus bruit blanc. Les caractéristiques des processus ARMA(p, q) sont différentes de celles des processus autorégressifs et des processus moyenne mobile. Elles sont toutes comparées dans le tableau 9.25.

À titre d'exemple, le processus ARMA(1,1) est défini comme suit :

$$Y_t - \phi Y_{t-1} = e_t - \theta e_{t-1}.$$

On suppose $\phi \neq \theta$. Dans le cas contraire, les deux opérateurs se *simplifient*, pour donner l'équation d'un bruit blanc $y_t = e_t$.

	Bruit blanc	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
Condition de stationnarité	non	oui*	non	oui*
Condition d'inversibilité	non	non	oui**	oui**
Fonction d'autocorrélation r_k	oui	non	oui	non
tronquée	Pour ($k > 0$)		(pour $k > q$)	
Fonction d'autocorrélation partielle p_k tronquée	oui	oui	non	non
	(pour $k > 0$)	(pour $k > p$)		

* La condition de stationnarité porte sur les racines du polynôme $1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$

** La condition d'inversibilité porte sur les racines du polynôme $1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$

[Retour au chapitre 9](#)